



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## BASINÇLI HAVA YATAKLARINDA REYNOLD'S DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN DİFERANSİYEL TRANSFORM SONLU FARKLAR HİBRİD METODU UYGULAMASI

Abdurrahim Dal<sup>1</sup> ve Tuncay Karaçay<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Gazi Üniversitesi, Ankara

### ABSTRACT

In air bearings, pressurized air sent between rotor and bearing surfaces prevents direct contact between surfaces and serves like a lubrication film. In order to investigate dynamics of a rotor supported by air bearing, the air flow between these surfaces must be modeled and solved to obtain pressure distribution as well as film forces over the surfaces. In this study, a hybrid method of Differential Transform&Finite Difference is used to solve Reynold's equation which describes the air flow between rotor and bearing surfaces. Reynold's equation is transformed from time domain to K-domain using Differential Transform theory. Then the transformed equation is discretized by using central difference scheme and pressure values are calculated on numerical solution grid iteratively. Effects of differential transform parameters and grid size on the solution are investigated.

### ÖZET

Basınçlı hava yataklarında, yatak ve rotor yüzeylerine iletilen basınçlı hava, bu iki yüzeyin birbirine temas etmesini önler ve yağlayıcı görevi görür. Yatak-rotor sisteminin dinamiğinin incelenmesi için, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki bu akışın modellenmesi ve bu modelin çözülerek yağlayıcı film kuvvetlerinin, yani basınç dağılımlarının elde edilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada hibrid çözüm metotlarından biri olan Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu Farklar metodu basınçlı hava yataklarında yatak ve rotor arasındaki havanın hareketini ifade eden Reynold's denklemine uygulanmıştır. Reynold's denklemi, Diferansiyel Dönüşüm teorisi kullanılarak zaman tanım bölgesinden diferansiyel tanım bölgesine dönüştürülmüştür. Dönüştürülen Reynold's denklemi merkezi farklar metodu ile ayrıştırılmış ve çözüm gridi üzerindeki basınç değerleri iteratif bir yöntem ile hesaplanmıştır. Diferansiyel dönüşüm parametrelerinin ve grid boyutlarının çözüm üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

### GİRİŞ

Basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, basınçlandırılmış hava yatak üzerine yerleştirilen orifislerle yatak ve rotor yüzeyleri arasına iletilerek bu yüzeyler arasında yağlayıcı bir etki oluşturur. Bu tip sistemlerde, sıvı yağlayıcılara göre havanın viskozitesinin oldukça düşük olması sayesinde, sürtünme kayıpları da azalmakta ve dolayısıyla yüksek hızlarda çalışan rotorların yataklanmasında sistemlere üstünlük sağlamaktadır. Dolayısıyla, basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, yatak ve rotor arasındaki havanın akışı sistemin dinamiğini de doğrudan etkilemektedir. Havanın sıkıştırılabilirliği ve doğrusal olmayan davranışı sebebiyle yatak-rotor arasındaki akış

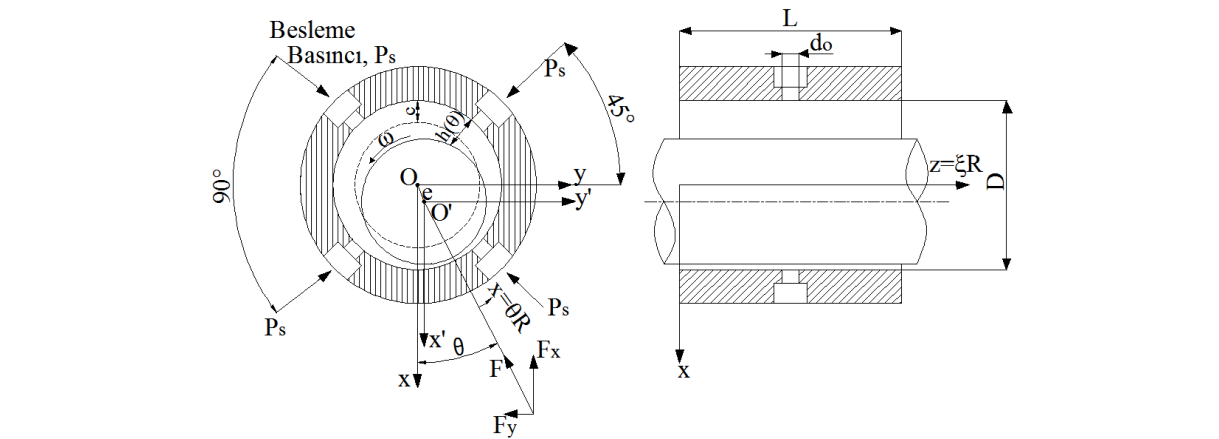
modelinin çözümlenmesi, akış karakteristiğine etki eden parametrelerin incelenmesi ve yatağın dinamik karakteristiğinin optimizasyonu için oldukça önemlidir. Sıkıştırılabilen bir akış ve yatak-rotor sisteminin geometrisi için yapılan kabuller ile birlikte Navier-Stokes ve süreklilik denklemleri bir arada kullanılarak, havanın hareketi Reynold's denklemi olarak adlandırılan parabolik diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir [1-4]. Reynold's denklemi yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşluk miktarına, akışkanın termodinamik özelliklerine, rotorun açısal hızına, zamana ve rotorun yatay ve dikeyde hareketine bağlı olarak değişen bir ifadedir ve akışkanın hızına veya akışkanın basıncına göre düzenlenebilir [5]. Akışkanın basıncına göre düzenlenen ve analitik çözümü olmayan Reynold's denklemi, sayısal çözüm metotları kullanılarak çözülüp, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımları, basınç kuvvetleri ve dolayısıyla yatak yük taşıma kapasitesi gibi yatak-rotor sisteminin dinamik karakteristikleri belirlenebilir. Basınçlı hava yatakları konusunda yapılan bir çok çalışmada, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımının elde edilmesi için Reynold's denklemi pertürbasyon metodu kullanılarak çözülmektedir [6-9]. Pertürbasyon metodunun yanı sıra Reynold's denkleminin sayısal çözümü için sonlu elemanlar [10], sonlu farklar [11-13] ve Newton-Rapson [14,15] metotları da sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak bu çözüm metotlarında bir grid noktasının hesaplanması için en az beş bilinmeyenli bir denklem takımının çözülmesi gerekmektedir. Dolayısıyla her bir grid noktasının basınç değerlerinin hesaplanması için işlemci zamanı ve yükü de paralel olarak artmaktadır [16]. Basınç dağılımının hesaplanması için kullanılan çözüm tekniklerinin iyileştirilmesi ve değişen yönlü kapalı integrasyon metodu gibi daha hızlı sonuçlar veren algoritmaların kullanılması son zamanlarda BHY konusundaki çalışmalarda sıklıkla yer almaktadır [17-18]. Bu çalışmalarda kullanılan yöntemler de sonlu farklar metodu tabanlı olup, sayısal çözüm gridi üzerindeki nokta sayısına bağlı olarak değişen bir matrisin çözülmesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu matrisin büyümesi ile birlikte işlemci yükü ve çözüm süresi artmaktadır. Ayrıca basınçlı hava yatakları ile rotor arasındaki radyal boşluğun artması ( $>75 \mu\text{m}$ ) ile birlikte kullanılan bu metotların doğasında bulunan yakınsama sorunları ortaya çıkmaktadır [17]. Doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olan Reynold's denkleminin sayısal çözümü için son yıllarda, yakınsama hatalarını azaltabilen ve çözüm süresini hızlandırabilen Artarda Aşırı Gevşetme&Sonlu Farklar (Successive Over Relaxation&Finite Difference) [16,18] ve Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu Farklar (Differential Transform&Finite Difference) [16,19,20] gibi hibrid çözüm yöntemlerinin kullanımı yaygınlaşmaktadır. Hibrid metotlarda grid boyutuna bağlı bir matrisin çözümü yerine, sayısal çözüm gridinin düğüm noktalarındaki değerler cebirsel olarak hesaplanabilmektedir. Dolayısıyla işlemci yükü ve buna paralel olarak çözüm süresi de diğer metotlarla kıyaslandığında azalmaktadır [20].

Bu çalışmada hibrid çözüm metotlarından biri olan Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu Farklar metodu basınçlı hava yatakları yatak ve rotor arasındaki havanın hareketini ifade eden Reynold's denkleminde uygulanmıştır. Bu kapsamda sıkıştırılabilen bir akışkan olan hava için literatürde kullanılan Reynold's denklemi, Diferansiyel Dönüşüm teorisi kullanılarak zaman tanım bölgesinden diferansiyel tanım bölgesine dönüştürülmüştür. Dönüştürülen Reynold's denklemi merkezi farklar metodu ile ayrıştırılarak, çözüm gridi üzerindeki basınç değerleri elde edilmiştir. Diferansiyel dönüşüm parametrelerinin, zaman adımının ve grid boyutlarının yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımına etkileri araştırılmıştır.

## MATEMATİKSEL MODEL

### Yatak ve Rotor Yüzeyleri Arasındaki Akışın Modellenmesi

Basınçlı hava yatağı, Şekil 1'de gösterildiği gibi yatak üzerine açılan besleme deliklerinden yatak içerisine iletilen basınçlandırılmış hava sayesinde; dönmekte olan bir rotoru taşır. Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşlukta hareket eden hava, rotor dinamiğinin önemli parametreleri olan yatak katılığı ve sönümlemeyi sağlamaktadır.



Şekil 1. Basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş rotorun şematik gösterimi

Basınçlı hava yataklarında yatak ve rotor arasındaki havanın hareketi; yatakların geometrilerine ve havanın termodinamik özelliklerine bağlı olarak akışkanın viskozitesinin sabit olduğu, Navier-Stokes denklemiindeki atalet kuvveti ve cisim kuvvetleri ifadelerinin çok küçük olduğu ve ince yağlayıcı film geometrisinden dolayı basıncın bu ince filmin kalınlığı boyunca değişmediği kabulleri altında modellenmektedir [4]. Yapılan bu kabuller ile birlikte, Navier-Stokes denklemleri ve süreklilik denklemi düzenlenerek yatak ve rotor arasındaki basınç dağılımının matematiksel ifadesi olan Reynold's denklemi silindirik koordinatlarda ve boyutsuz formda Eş. 1'de verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \text{PH}^3 \frac{\partial \text{P}}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \text{PH}^3 \frac{\partial \text{P}}{\partial \xi} \right] + \Gamma_s \text{P}_s \text{H}\phi(\text{P}) = \Lambda \frac{\partial}{\text{R}\partial \theta} (\text{PH}) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\text{PH}) \quad (1)$$

Eş.1'de geçen boyutsuz boşluk fonksiyonu rotor eksantrikliğine ( $\varepsilon$ ) bağlı olarak  $H=(1+\varepsilon\cos(\theta))$  şeklinde ifade edilmektedir. Eş. 1'de geçen  $\theta$  ve  $\xi$  silindirik koordinat sistemini,  $\Lambda=6\mu\omega(R/c)^2/P_a$  sıkıştırılabilirlik sayısı,  $\sigma=12\mu(R/c)^2/P_a$  yatak sayısı olarak ifade edilmektedir ve debi ifadesindeki besleme parametresi Eş. 2'de ve orifis fonksiyonu Eş. 3'de verilmiştir.

$$\Gamma_0 = \frac{12\pi d_0^2 \mu \sqrt{R^0 T^0}}{p_a c^2 \Delta \theta \Delta \xi} \quad (2)$$

$$\Phi(P) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_d}{p_u} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_d}{p_u} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} & ; 1 > \frac{p_d}{p_u} \geq r_p \\ \frac{2k}{k+1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} & ; \frac{p_d}{p_u} < r_p \end{cases} \quad (3)$$

## Diferansiyel Transform Teorisi

$x(t)$ ,  $D$  bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun,  $x(t)$  fonksiyonunun Taylor serileri ile açılımı;

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right)_{t=t_i} \quad (4)$$

$t_i=0$  için; Eş. 4 Maclaurin serisi olarak  $x(t)$ ;

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right)_{t=0} \quad (5)$$

$x(t)$  fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü veya Taylor dönüşümü;

$$x(k) = T[x(t)] = \frac{\Delta t^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right)_{t=0} \quad (6)$$

burada dönüşüm parametresi olan  $k$ ,  $K$  bölgesindeki negatif olmayan tam sayı olarak ifade edilir.  $\Delta t$  fonksiyonun çözümünde kullanılan zaman adımı olarak verilmiştir. Taylor serisi açılımı kullanılarak, diferansiyel dönüşümün tersi;

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{\Delta t} \right)^k X(k) \quad (7)$$

olarak yazılabilir.  $x(t)$  fonksiyonun türevi;

$$T \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = \frac{k+1}{\Delta t} X(k+1) \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir.  $x(t)$  ve  $y(t)$  fonksiyonlarının çarpımı ise;

$$T[x(t)y(t)] = X(k) \otimes Y(k) = \sum_{l=0}^k X(l)Y(k-l) \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir.

### Diferansiyel Transform Teorisinin Reynold's Denklemini Uygulanması

Reynold's denklemindeki (Bknz. Eş. 1) türev ifadeleri düzenlenerek, yeniden;

$$\begin{aligned} & -3H^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) - H^3 \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\Lambda H}{P} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + 2\Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ & + \frac{\sigma H}{P} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + 2\sigma P \frac{\partial H}{\partial t} = 2\dot{M} \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade Diferansiyel Transform teorisi kullanılarak, yeniden düzenlenirse,  $K$  tanım bölgesinde Reynold's denklemi;

$$\begin{aligned} & -3I \otimes \frac{dH}{d\theta} \otimes \frac{dQ}{d\theta} - J \otimes \frac{d^2 Q}{d\theta^2} - 3I \otimes \frac{dH}{d\xi} - J \otimes \frac{d^2 Q}{d\xi^2} + 2\Lambda \otimes \frac{dH}{d\theta} \otimes P \\ & + 2\Lambda \otimes \frac{dP}{d\theta} \otimes H + 4\Lambda \otimes \frac{dH}{d\tau} \otimes P + 4\Lambda \otimes \frac{dP}{d\tau} \otimes H = 2M \end{aligned} \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$H \otimes H = \sum_{l=0}^k H_{i,j}(k-l)H_{i,j}(l) \quad (12)$$

$$Q(k) = P \otimes P = \sum_{l=0}^k P_{i,j}(k-l)P_{i,j}(l) \quad (13)$$

$$J(k) = H \otimes H \otimes H = \sum_{l=0}^k H_{i,j}(k-l) \sum_{m=0}^l H_{i,j}(l-m)H_{i,j}(m) \quad (14)$$

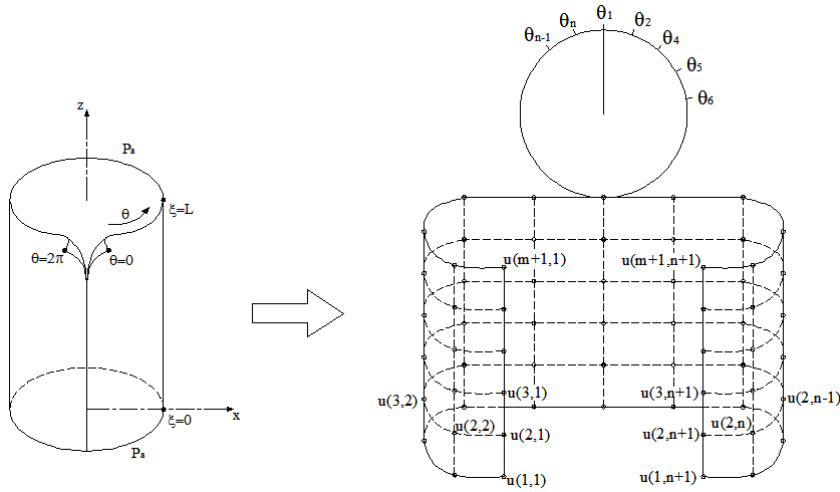
şeklinde dir.

### REYNOLD'S DENKLEMİ'NİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Reynold's denklemi Diferansiyel Transform&Sonlu Farklar hibrid metodu ile çözümü için öncelikle, çalışma bölgesi (kontrol yüzeyi) gridlere bölünerek sonlu farklar metotlarından biri ile ayrıklaştırılabilir ve ayrık hale getirilen Reynold's denklemi belirlenmiş zaman adımında çözülebilir.

#### Grid Oluşturulması

Nümerik çözüm için Şekil 2'de gösterildiği gibi silindirik bir geometriye sahip yatağın iç yüzeyi herhangi bir noktasından açıldığı varsayılarak dikdörtgen bir grid oluşturulabilir. Eş. 1'de verilen boyutsuz Reynold's denkleminin  $\theta$  koordinatı yatak iç yüzeyinin çevresel koordinat eksenini ifade etmekte olup, 0 ile  $2\pi$  arasında,  $\xi$  koordinatı ise yatağın boyutsuz uzunluğunu ifade eden koordinat eksenini olup, 0 ile L arasında değerler alacaktır. Oluşturulan grid, koordinat adımları  $\Delta\theta$  ve  $\Delta\xi$  olacak şekilde  $N_z=L/\Delta\xi$  ve  $N_x=L/\Delta\theta$  sayıda parçalara bölünebilir. Dolayısıyla Şekil 2'de gösterildiği gibi oluşturulan grid sınırdaki noktalarla birlikte  $(N_x+1) \times (N_z+1)$  sayıda noktadan oluşacaktır.



Şekil 2. Çözüm gridinin oluşturulması

#### Reynold's Denkleminin Ayrıklaştırılması

Eş. 11'de verilen Diferansiyel Transform teorisi uygulanmış Reynold's denklemindeki terimler, Sonlu Farklar metotlarından merkezi farklar kullanılarak ayrıklaştırılarak çözüm gridi üzerindeki her bir düğüm noktasının basınç değeri hesaplanabilir. Örnek olarak Eş. 11'de verilen Reynold's denkleminin ilk terimi;

$$-3I \otimes \frac{dH}{d\theta} \otimes \frac{dQ}{d\theta} = -3 \sum_{l=0}^k I_{i,j}(k-l) \sum_{m=0}^l \left[ \frac{H_{i,j+1}(l-m) - H_{i,j-1}(l-m)}{2\Delta\theta} \right] \left[ \frac{Q_{i,j+1}(m) - Q_{i,j-1}(m)}{2\Delta\theta} \right] \quad (15)$$

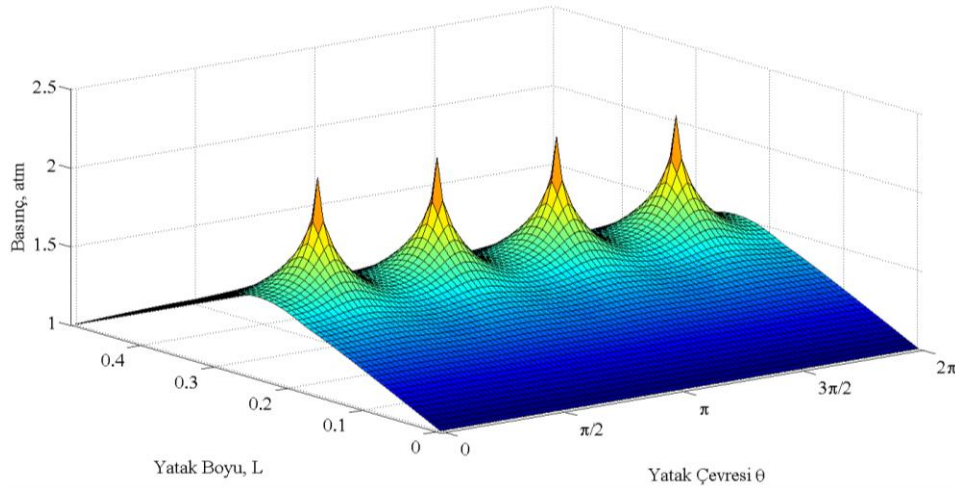
şeklinde ayrıklaştırılabilir. Eş. 15'de geçen  $H$ , boyutsuz radyal boşluk fonksiyonu,  $k$ ,  $l$  ve  $m$  diferansiyel dönüşüm parametrelerini ifade etmektedir. Eş. 15'de verilen açılıma benzer şekilde Eş. 11'de verilen Reynold's denkleminin tüm terimleri merkezi farklar metodu kullanılarak ayrıklaştırılmış ve çözüm şeması oluşturulmuştur.

### SAYISAL SONUÇLAR

İki ucu atmosfere açık olan basınçlı hava yatağının nümerik çözümü için başlangıçta yatağın içerisindeki basınç atmosfer basıncında tanımlanmış ve yatağın silindirik geometrisine bağlı olarak sınır şartları tanımlanmıştır. Reynold's denklemi, iteratif bir çözüm yöntemine uygun olarak hazırlanan bir algoritma ile birlikte MATLAB ortamında çözdürülmüştür.

#### Basınç Dağılımı

75  $\mu\text{m}$  radyal boşluğa sahip 4 orifisli, yatak boy-çap oranı 2 ve besleme basıncı 3 atm olan basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş bir yatak-rotor sistemi için Reynold's denklemi, yatak ve rotor eş merkezli ( $\varepsilon=0$ ) konumda iken Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu Farklar hibrid çözüm metodu kullanılarak çözdürülmüş ve basınç dağılımları elde edilmiştir. Şekil 3'de yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımı üç boyutlu olarak verilmiştir. Basınçlı hava yatağının silindirik geometrisine ve rotorun yatak içerisindeki konumuna bağlı olarak, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımı hem yatak çevresine hem de yatak boyuna göre simetrik olarak oluşmuştur. Orifis çıkışlarında beklendiği gibi en yüksek basınç değerleri elde edilmiş ve orifislerden yatak uçlarına doğru, yatağın her iki ucunun atmosfere açık olması sebebiyle basınç değerleri atmosfer basıncına kadar düşmüştür.



Şekil 3. Basınç dağılımı ( $\varepsilon=0$ ,  $c=75 \mu\text{m}$ )

#### Grid Boyutlarının ve Diferansiyel Dönüşüm Parametresinin ( $k$ ) Sayısal Çözüme Etkisi

Grid boyutlarının Reynold's denkleminin sayısal çözümüne etkilerinin incelemek amacıyla, 75  $\mu\text{m}$  radyal boşluğa sahip 4 orifisli, yatak boy-çap oranı 2 ve besleme basıncı 3 atm olan basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş bir yatak-rotor sistemi için basınç dağılımını elde eden algoritma farklı grid boyutları için MATLAB ortamında çözdürülmüştür. Basınç değerlerinin en yüksek olduğu orifislerin bulunduğu grid çizgisi üzerindeki basınç değerleri, yatak çevresi boyunca ( $0-2\pi$  arasında) Tablo 1'de verilmiştir. Göreceli hata 1. ve 2. gridler için % 1 civarında iken 2. ve 3. gridler arasındaki değişim % 0,7'lerin de altına düşmektedir. Tablo 2'deki bilgisayar CPU süreleri de göz önüne alınarak 2. gridin yeterli olduğu görülmüştür. Diferansiyel dönüşüm parametresi  $k$ 'nın Reynold's denkleminin sayısal çözümüne etkisinin incelenmesi amacıyla da aynı geometrik özelliklere sahip yatak-rotor sisteminin basınç dağılımını elde eden algoritma farklı  $k$  değerleri için çözdürülmüş ve orifislerin bulunduğu

grid çizgisi üzerindeki basınç değerleri yatak çevresi boyunca Tablo 1'de verilmiştir. Tablodaki basınç değerleri incelendiğinde, k parametresinin artması ile birlikte sonuçlar neredeyse değişmemiştir. Özellikle k=2 ve k=3 karşılaştırıldığında, basınç değerleri arasındaki fark  $10^{-5}$  atm civarındadır. Ancak k parametresinin artması ile birlikte CPU süreleri de artmaktadır.

Çizelge 1. Grid ölçülerinin ve diferansiyel çözüm parametresinin sayısal sonuca etkisi

	Grid Ölçüleri ( $N_z \times N_x$ )			Diferansiyel Dönüşüm Parametresi (k)		
	1. Grid (48x72)	2. Grid (64x96)	3. Grid (80x120)	k=1	k=2	k=3
0	1.5876672	1.5723351	1.5577780	1.5727379	1.5723351	1.5723474
$\pi/2$	1.5730060	1.5606043	1.5480678	1.5606992	1.5606043	1.5606069
$\pi$	1.5704287	1.5586832	1.5465259	1.5587293	1.5586832	1.5586843
$3\pi/2$	1.5730060	1.5606043	1.5480678	1.5606992	1.5606043	1.5606069
$2\pi$	1.5876672	1.5723351	1.5577780	1.5727379	1.5723351	1.5723474
CPU Zamanı	73.7183	183.0050	348.7737	69.2771	183.0050	365.7563

## SONUÇLAR

Bu çalışmada hibrid çözüm metodlarından biri olan Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu Farklar metodu basınçlı hava yataklarında yatak ve rotor arasındaki havanın hareketini ifade eden Reynold's denklemine uygulanmıştır. Bu kapsamda sıkıştırılabilen bir akışkan olan hava için literatürde kullanılan Reynold's denklemi, Diferansiyel Dönüşüm teorisi kullanılarak zaman tanım bölgesinden k tanım bölgesine dönüştürülmüştür. Dönüştürülen Reynold's denklemi merkezi farklar metodu ile ayrıklaştırılarak, çözüm gridi üzerindeki basınç değerleri elde edilmiştir. Sonuç olarak, Diferansiyel Dönüşüm&Sonlu farklar hibrid metodunun doğrusal olmayan kısmi diferansiyel bir denklem olan Reynold's denkleminin sayısal çözümü için hızlı ve kararlı bir çözüm sağladığı ve daha basit bir iteratif yöntem olduğu görülmüştür. Diferansiyel Dönüşüm parametresinin büyümesi ( $k > 2$ ) ile grid üzerindeki basınç değerleri neredeyse değişmemiş ve basınç dağılımı verilen basınçlı hava yatağı için optimum grid boyutları 64x96 olarak belirlenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Ausman, J. S., "The fluid dynamic theory of gas lubricated bearing", *Trans. Amer. Soc. Lub., Engrs.*, 79 (6): 1218-1224 (1957).
- [2] Robinson, C. H., Sterry, F., "The static strength of pressure fed gas journal bearings, jet bearings", *AERE Report, 2642, Harwell*, (1958).
- [3] Heinrich, G., "The theory of the externally pressurized bearings", *1st International Symposium on Gas-Lubricated Bearing, USA*, 42 (1959).
- [4] Gross, W. A., "Investigation of whirl in externally pressurized air-lubricated journal bearings", *Trans. Amer. Soc. Mech. Engr. J. Basic Eng.*, 84: 132-140 (1962).
- [5] Wang, J., "Design of Gas Bearing Systems for Precision Applications", PhD. Thesis, *Technische Universiteit, Eindhoven*, 1-35 (1993).

- [6] Lund, J. W., "A theoretical analysis of whirl instability and pneumatic hammer for a rigid rotor in pressurized gas journal bearing", *An International Journal on the Science and Technology of Friction, Lubrication and Wear*, 12 (2): 154-166 (1967).
- [7] Powell, J. W., "The design of aerostatic bearings", *Machinery Publishing Co. Limited*, UK, 110-160 (1970).
- [8] Sneek, J., Yen, K. T., "The externally pressurized, porous wall, gas-lubricated journal bearing", *ASLE Transactions*, 7 (3): 288-298 (1964).
- [9] Park, Jung-Koo, and Kyung-Woong Kim. "Stability analyses and experiments of spindle system using new type of slot-restricted gas journal bearings." *Tribology International* 37.6 (2004): 451-462.
- [10] Kim, T. H., "Analysis of side end pressurized bump type gas foil bearings: a model anchored to test data", PhD Thesis, *Texas A&M University*, USA, 94-130 (2007).
- [11] Majumdar, B. C. "Analysis of Externally Pressurized Gas Journal Bearing." *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12(1970): 1-8.
- [12] Wang, Cheng-Chi, Ming-Jyi Jang, and Yen-Liang Yeh. "Bifurcation and nonlinear dynamic analysis of a flexible rotor supported by relative short gas journal bearings." *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2007): 566-582.
- [12] Colombo, F., Raparelli, T., Viktorov, V., "Externally pressurized gas bearings: A comparison between two supply holes configurations", *Tribology International*, 42 (2): 303–310 (2009).
- [13] Wang, Cheng-Chi, and Cheng-Ying Lo. "Nonlinear dynamic analysis of a flexible rotor supported by externally pressurized porous gas journal bearings." *Journal of tribology* 124.3 (2002): 553-561.
- [14] Lee, Jeong-Bae, and Kyung-Woong Kim. "Effects of synchronous vibration of bearing on stability of externally pressurized air journal bearings." *Journal of tribology* 121.4 (1999): 830-835.
- [15] Zhang, Jiazhong, Wei Kang, and Yan Liu. "Numerical method and bifurcation analysis of Jeffcott rotor system supported in gas journal bearings." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 4.1 (2009): 011007
- [16] Wang, C., Yau, H., "Theoretical analysis of high speed spindle air bearings by a hybrid numerical method", *Applied Mathematics and Computation*, 217 (5): 2084-2096 (2010).
- [17] Czolczynski, K., "Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems", Ling, F. F., Winer, W. O., *Springer*, NewYork, 1-48 (1999).
- [18] Piekos, E. S., "Numerical Simulation of Gas- Lubricated Journal Bearings For Microfabricated Machines", PhD. Thesis, *Department of Aeronautics and Astronautics Massachusetts Institute Of Technology*, Boston, 15-108 (2000).
- [19] Zhang, Y. F., et al. "Motion analysis of a rotor supported by self-acting axial groove gas bearing system with double time delays." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 228.16 (2014): 2888-2899.
- [20] C-C. Wang, Application of a hybrid method to the nonlinear dynamic analysis of a flexible rotor supported by a spherical gas-lubricated bearing system, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Volume 70 (2009), 2035-2053.